1. cvičení - teorie

Otevřenost aspol.

Značení. Namísto $x \in \mathbb{R}^n \colon V(x)$, kde $V(x)$ je nějaká vlastnost pro bod $x \in \mathbb{R}^n$, budeme psát $[V(x)]$.

$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \rho(x, y) < r\} = [\rho(x, y) < r]$, kde ρ je euklidovská metrika na $\mathbb{R}^n$. Budeme ji nazývat otevřenou koulí o středu x a poloměru r.

Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}^n$.

Bod $x \in \mathbb{R}^n$ je

- **vnitřní bod** množiny M, pokud $\exists r > 0 \colon B(x, r) \subset M$
- **hraniční bod** množiny M, pokud $\forall r > 0 \colon B(\boldsymbol{x}, r) \cap M \neq \emptyset \quad \text{a} \quad B(\boldsymbol{x}, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$.

Dále

- $\operatorname{Int} M = [x$ je vnitřní bod mn. $M]$ je **vnitřek množiny** M,
- $H(M) = [x$ je hraniční bod mn. $M]$ je **hranice množiny** M.

Uzávěr množiny M je množina $M \cup H(M)$, značíme ji $\overline{M}$.

Množina M je **otevřená** (v $\mathbb{R}^n$), jestliže je každý její bod zároveň vnitřním bodem.

Množina M je **uzavřená** (v $\mathbb{R}^n$), jestliže $H(M) \subset M$ (respektive, pokud $\overline{M} = M$).

Poznámka. Body množiny M splňují první podmínku v definici hraničního bodu automaticky.

Věta 11. Nechť f je spojitá funkce na $\mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

- množiny $[f > c], [f < c]$ jsou otevřené,
- množiny $[f \leq c], [f \geq c], [f = c]$ jsou uzavřené.

Věta 2, 5 (vlastnosti otevřených a uzavřených množin)**.** V $\mathbb{R}^n$ platí:

- $\emptyset, \mathbb{R}^n$, libovolné sjednocení otevřených, konečný průnik otevřených jsou **otevřené** množiny
- $\emptyset, \mathbb{R}^n$, libovolný průnik uzavřených, konečné sjednocení uzavřených jsou **uzavřené** množiny

Věta 4. $M \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená $\iff$ $\mathbb{R}^n \setminus M$ uzavřená $\iff$ pro každou posl. $x_n \in M, n \in \mathbb{N}$, konvergující k $x \in \mathbb{R}^n$ platí, že $x \in M$.

Návody

Jak určit otevřenost/uzavřenost

- Převést to na Větu 11 - vyjádřit množinu M např. jako $[f > c]$ pro spojitou f apod.
- Využít Věty 2, 5 (průniky a sjednocení ot. a uz. množin).
- Určit hranici - obvykle je hranicí něco jako $[f = c]$.
- Pokud $H(M) \subset M$, pak je M uzavřená, pokud $H(M) \cap M = \emptyset$, pak je M otevřená. Jinak M není ani jedno.

Jak určit hranici

- Z definice
- Je-li $M = [f < c]$, pak je $[f = c]$ hranice. To se ukáže takto: zvolím $[x, y] \in [f = c]$ a $r > 0$ libovolně. Pak uvažuji $\delta \in (0, r)$ a ukážu, že $[x, y+\delta] \in M$ a $[x, y-\delta] \notin M$, nebo naopak. (případně pracuji s $[x \pm \delta, y]$). Tím dokážu, že $[f = c] \subset H(M)$. Potřebuji ještě ukázat, že ostatní body nejsou hraničními. Dále vím, že $[f > c]$ je ot. mn. Proto, pro $[x, y] \in [f > c]$ existuje $r > 0$ t.ž. $B([x, y], r) \subset [f > c]$, tedy $[x, y]$ nemůže být hraničním bodem.

  Typicky volba $[x, y \pm \delta]$ funguje, neb elementární funkce je lokálně ve většině bodech rostoucí/klesající. Jinak je potřeba využít nějaké znalosti funkce f a faktu, že je spojitá.

Pohled na uzavřenost pomocí posloupností:
Dle Věty 4 se dá říct, že množina je uzavřená, pokud každá konvergentní posloupnost jejích bodů konverguje k jejímu bodu. Resp.: M je uzavřená, pokud pro každou konvergentní posl. $\{x_n\} \subseteq M$ platí, že $\lim_{n\to\infty} x_n \in M$. Uzávěr množiny M je potom $\{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{n\to\infty} x_n, x_n \in M\}$.

Spojitost

Definice. Nechť f je funkce n proměnných a $x \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je **spojitá v bodě** x, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in B(x, \delta) \colon f(y) \in B(f(x), \varepsilon).$$

Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in M$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** x **vzhledem k množině** M, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in B(x, \delta) \cap M \colon f(y) \in B(f(x), \varepsilon).$$

Věta 8 (Operace se spojitými funkcemi)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}^n, x \in M, f \colon M \to \mathbb{R}, g : M \to \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$. Jestliže f a g jsou spojité v bodě x vzhledem k M, potom také funkce $c \cdot f, f + g$ a $f \cdot g$ jsou spojité v x vzhledem k M. Pokud navíc funkce g je nenulová v bodě x, pak je spojitá i funkce $\frac{f}{g}$ v bodě x vzhledem k M.

Věta 9 (Skládání spojitých funkcí)**.** Nechť $r, s \in \mathbb{N}, M \subset \mathbb{R}^s, L \subset \mathbb{R}^r$ a $y \in M$. Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ jsou funkce definované na M, spojité v bodě y vzhledem k M a $[\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)] \in L$ pro každé $x \in M$. Nechť $f \colon L \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $[\varphi_1(y), \dots, \varphi_r(y)]$ vzhledem k L. Potom složená funkce $F \colon M \to \mathbb{R}$ daná předpisem

$$F(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)), x \in M,$$

je spojitá v bodě y vzhledem k M.

Definice. Uvažme funkci $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pak za **vrstevnici funkce** f považujeme množinu $[f = c]$, kde $c \in \mathbb{R}$.